Hessisches Kompetenzzentrum
für Hochleistungsrechnen

Die Whitehead‘sche Asphärizitätsvermutung



Researchers
PD Dr. Stephan Rosebrock and Dr. Jens Harlander

Principal Investigator
Prof. Dr. Wolfgang Metzler

Project Term
2007 - 2020

Project Areas
Mathematics

Clusters
LOEWE CSC Cluster Frankfurt

University
Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Introduction

Ein 2-Komplex K heißt asphärisch, wenn jede stetige Abbildung einer 2-Sphäre S nach K homotopieäquivalent zur der trivialen Abbildung ist, bei der ganz S auf einen Punkt abgebildet wird. 1941 fragte Whitehead, ob Teilkomplexe asphärischer 2-Komplexe immer selbst asphärisch sind. Die Frage ist immer noch offen, obwohl es viele Veröffentlichungen zur WhiteheadVermutung in den letzten Jahrzehnten gegeben hat.Die Whitehead-Vermutung lässt sich in einen endlichen und einen unendlichen Fall unterteilen. Bis auf die Andrews-Curtis-Vermutung muss es im endlichen Fall, falls es überhaupt endliche Gegenbeispiele gibt, ein Gegenbeispiel unter 2-Komplexen zu Baumpräsentationen geben. Baumpräsentationen verallgemeinern Knotenpräsentationen und sind ihr algebraisches Analog. In diesem Projekt geht es darum, die Asphärizität von Baumpräsentationen zu untersuchen um langfristig entweder ein Whitehead-Gegenbeispiel zu finden oder Baumpräsentationen als asphärisch zu erweisen.

Ist ein 2-Komplex nicht-asphärisch, so muss es ein reduziertes sphärisches Diagramm geben, welches ein nichttriviales Homotopieelement realisiert. Es ist unentscheidbar, ob ein 2-Komplex asphärisch ist oder nicht. Trotzdem lassen sich sphärische Diagramme über 2-Komplexen konstruieren und auf Reduzierbarkeit prüfen.

Methods

Seit 2008 läuft auf den CSC Clustern ein Programm, welches systematisch „kleine“ Baumpräsentationen nimmt und versucht

reduzierte sphärische Diagramme über den zugehörigen 2-Komplexen zu bauen. Bisher hat das Programm etwa 150 reduzierte sphärische Diagramme über Baumpräsentationen konstruiert. Es ist noch kein Gegenbeispiel zur Whitehead-Vermutung gefunden worden, aber alle reduzierten Diagramme weisen eine ähnliche Struktur auf. Diese Struktur liefert wesentliche theoretische Erkenntnisse über sphärische Diagramme, die sich für weitere Forschungen nutzen lassen. In diesem Rahmen konnte in gemeinsamer Arbeit mit Prof. Dr. Harlander (Boise, Idaho, USA) die Asphärizität injektiver Baumpräsentationen gezeigt werden [1] und eine weitere Klasse nicht-injektiver Baumpräsentationen als asphärisch erwiesen werden.[2]

Outlook

Das Programm hat bisher Baumpräsentationen, die sich als Intervalle darstellen lassen, mit bis zu zehn Erzeugenden systematisch untersucht. In Zukunft sollen größere Beispiele und auch solche untersucht werden, die keine Intervallform haben. Es wurden bisher nur zwei Beispiele reduzierter sphärischer Diagramme gefunden, die keine Intervallform haben, so dass diese Beispielklasse besonders interessant sein könnte. Erstmals sind die theoretischen Erkenntnisse, die zum Teil den Beispielen aus dem Programm zu danken sind, so klar, dass versucht werden kann, die Asphärizität aller Baumprä- sentationen zu beweisen. Es besteht die Hoffnung, dass große Klassen nicht-injektiver Baumpräsentationen ohne Teilbäume den Gewichtstest erfüllt. Dieser Test erweist 2-Komplexe über Krümmung als asphärisch. Es ist bekannt, dass nicht jeder 2-Komplex über einer Baumpräsentation den Gewichtstest erfüllt, möglicherweise lassen sich aber alle Baumpräsentationen durch einfache Homotopien in solche verwandeln.

Reference

[1] J. Harlander and S. Rosebrock (2014, preprint), Injective labeled oriented trees are aspherical.
https://link.springer.com/article/10.1007/s00209-016-1823-6

[2] J. Harlander and S. Rosebrock (2015), Aspherical Word Labeled Oriented Graphs and Cyclically Presented Groups.
https://doi.org/10.1142/S021821651550025X

Last Update: 2022-06-30 17:43